Kvadratická rovnice je matematická rovnice, ve které je nejvyšší stupeň (mocnina) neznámé roven dvěma. Tento typ rovnice má nejvýše dvě řešení.

Řešení

Každou kvadratickou rovnici lze upravit do následujícího tvaru:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a, b, c \in C$$
$$a \neq 0$$

- `x` = neznámá
- `a` = kvadratický koeficient
- `b` = lineární koeficient
- `c` = absolutní člen

Výpočet diskriminantu

Prvním krokem k řešení je výpočet tzv. **diskriminantu**, který se označuje písmenem `D`. Ten se vypočte dosazením do následujícího vzorce:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Další postup závisí na jeho hodnotě.

Diskriminant > 0

Je-li diskriminant větší než nula, bude mít rovnice dvě řešení, která se z koeficientů a diskriminantu vypočítají takto:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $-2x^2 - 15x + 8 = 0$.

O = D = $\mathbb{R}$

Určíme hodnotu koeficientů a, b, c:

$a = -2;\ b = -15;\ c = 8$

Diskriminant $D = (-15)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8 = 225 + 64 = 289$ tentokrát vyšel kladný, a proto dosazením do vzorečku dopočítáme dva kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot (-2)} = \frac{15 \pm 17}{-4} = \left\langle \begin{array}{ccc} \frac{32}{-4} & = & -8 \\ \frac{-2}{-4} & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

A určíme $\mathrm{K} = \left\{-8; \frac{1}{2}\right\}$.

Diskriminant = 0

Je-li diskriminant nulový, bude mít rovnice jedno řešení. Vzorec pro výpočet tohoto řešení vychází ze vzorce pro `D` >0, ale díky nulovému diskriminantu jej lze zjednodušit.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $9y^2 + 12y + 4 = 0$.

Nejprve standardně určíme $O = D = \mathbb{R}$.

V prvních příkladech ještě budeme určovat hodnotu koeficientů a, b, c, abychom získali jistotu při dalším počítání ve vzorečcích.

$a = 9$; $b = 12$; $c = 4$

Vypočteme diskriminant $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$. Kvůli nulovému diskriminantu víme, že rovnice bude mít jen jeden kořen. Ten získáme dosazením do vzorečku:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$$

$$K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

Diskriminant < 0

A konečně, je-li diskriminant menší než nula, rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $s^2 + s + 1 = 0$.

Opět určíme $O = D = \mathbb{R}$.

Určíme hodnotu koeficientů a, b, c:

$a = 1$; $b = 1$; $c = 1$

Vypočteme diskriminant $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$. Ten nám tentokrát vyšel záporný, a tak rovnou zapíšeme $K = \emptyset$.

Vypočítejte následující příklady na úplné kvadratické rovnice, o správnosti řešení se přesvědčte zkouškou a pak zapište množinu všech řešení K:

1/

a) $x^2 + 12x + 32 = 0$
b) $x^2 - 4x - 5 = 0$
c) $x^2 - 18x + 77 = 0$
d) $x^2 + 4x - 1 = 0$

2/

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$
b) $x^2 - 15x + 56 = 0$
c) $x^2 - 5x - 24 = 0$
d) $x^2 - 7x - 78 = 0$

Výsledky:

1/

a) K={-8; -4}
b) K={-1; 5}
c) K={7;11}
d) $K = \{-2 + \sqrt{5}\,;\ -2 - \sqrt{5}\ \}$

2/

a) K={3; 4}
b) K={7; 8}
c) K={–3; 8}
d) K={–6; 13}